ФМИ НА 2019-2020 - Задачи

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

2 юни 2020

Нека X е Банахово и $f : X \to R$ е локално Липшицова.

Определение 1. [Cla13, с. 195] Обобщена едностранна производна за f в точка $x \in X$ по посока $h \in X$ наричаме

$$f^{\circ}(x)(h) \coloneqq \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t} = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{y \in B(x,\delta) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t}.$$

Обобщен градиент за f в точка $x \in X$ наричаме

$$\partial_C f(x) \coloneqq \{x^* \in X^* \mid \forall h \in X, f^{\circ}(x)(h) \geq \langle x^*, h \rangle\}.$$

Единичен вектор $h \in S_X$ се нарича посока на спускане за f в точка $x \in X$, ако

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} < 0.$$

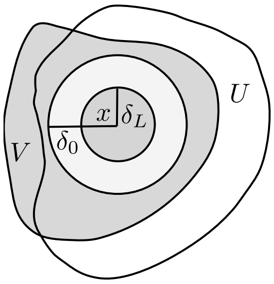
Лема 2. *Нека $x \in X$ е произволна точка, $U \subseteq X$ е произволна околност на x и $h \in X$ е произволна посока. Тогава съществуват константа L и радиус $\delta_L > 0$, така че*

1. *кълбото $B(x, \delta_L)$ се съдържа в U*
2. *f е Липшицова с константа L в кълбото $B(x, \delta_L)$*
3. *множеството от обобщени диференчни частни*

$$\left\{ \frac{f(y+th) - f(y)}{t} \mid y \in B(x, \delta_L), t \in (0, \delta_L) \right\} \subseteq B(0, L \|h\|)$$

е ограничено.

Доказателство. Фиксираме $x \in X$ и $h \in X$ и нека V е околност на x, в която f е Липшицова в константа L.



Нека $\delta_0 > 0$ е такова, че $B(x, \delta_0) \subseteq U \cap V$. Полагаме

$$\delta_L \coloneqq \frac{1}{2} \min \left\{ \delta_0, \frac{\delta_0}{\|h\|} \right\} < \delta_0$$

Условието на Липшиц е изпълнено с константа L в $B(x, \delta_L) \subseteq V$.
Освен това, за всички $y \in B(x, \delta_L) \subseteq$ U и $t \in (0, \delta_L)$ имаме, че $y + th \in B(x, \delta_0)$.
Наистина,

$$\|(y + th) - x\| \leq \|y - x\| + t \|h\| < \delta_L + \delta_L \|h\| = \begin{cases} \frac{\delta_0}{2}(1 + \|h\|), & \|h\| \leq 1 \\ \frac{\delta_0}{2\|h\|}(1 + \|h\|), & \|h\| > 1 \end{cases}.$$

И в двата случая получаваме, че $\|(y + th) - x\| < \delta_0$, т.е. $y + th \in B(x, \delta_0)$.
Следователно $y \in V$ и $y + th \in V$, откъдето

$$\frac{f(y + th) - f(y)}{t} \leq \frac{L \|f(y + th) - f(y)\|}{t} = L \|h\| .$$

□

Следствие 3. *Обобщената производна е крайна във всяка точка $x \in X$ и за всяка посока $h \in X$.*

Упражнение 1 (10.7)**.** Да се докаже, че

1. ако f има локален екстремум в x, тогава $0 \in \partial_C f(x)$
2. ако $0 \in \partial_C f(x)$, тогава съществува посока на спускане
3. ако X е Хилбертово, $0 \in \partial_C f(x)$ и x^* е елемент с минимална норма в $\partial_C f(x)$, да се докаже, че $v \coloneqq -\frac{x^*}{\|x^*\|}$ е посока на спускане, удовлетворяваща

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \leq -d(0, \partial_C f(x)) < 0.$$

Доказателство. 1. Ако x е локален максимум за f, той ще бъде локален минимум за $-f$, която също е локално Липшицова функция. Затова без ограничение на общността можем да считаме, че x е минимум за f.

Нека x е локален минимум за f в околността U и нека $h \in X$ е произволна посока. Тогава лема 2 ни дава радиус $\delta_L > 0$, така че $B(0, \delta_L) \subseteq U$ и за $\delta \in (0, \delta_L)$ да бъде краен супремумът

$$\sup_{\substack{y \in B(x,\delta) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t}.$$

В частност,

$$\sup_{\substack{y \in B(x,\delta) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t} \geq \sup_{t \in (0,\delta)} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \geq 0 = \langle 0, h \rangle .$$

При $\delta \downarrow 0$ получаваме

$$f^\circ(x)(h) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{y \in B(x,\delta) \\ t \in (0,\delta)}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t} \geq 0 = \langle 0, h \rangle .$$

Понеже h беше произволно, $0 \in \partial_C f(x)$.

2. Нека сега $0 \in \partial_C f(x)$. Да допуснем, че за всяка посока $h \in X$ е изпълнено

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \geq 0.$$

В такъв случай

$$f^\circ(x)(h) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t} \geq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \geq 0 = \langle 0, h \rangle$$

и значи имаме $0 \in \partial_C f(x)$, което е в противоречие с допускането $0 \notin \partial_C f(x)$. Следователно съществува посока $h \in X$, за която да е изпълнено

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} < 0.$$

Понеже искаме посоката на спускане да бъде единичен вектор, достатъчно е да нормираме h.

3. Нека x^* е елементът с минимална норма в $\partial_C f(x)$ и $v := -\frac{x^*}{\|x^*\|}$.

От [Cla13, определение 10.3] следва, че

$$f^\circ(x)(v) = \max\{\langle y^*, v \rangle : y^* \in \partial_C f(x)\}. \tag{1}$$

От неравенството на Коши-Буняковски-Шварц следва, че максимумът в 1 е ограничен от двете страни от $\langle y^*, v\rangle$ за някои от колинеарните на v вектори $y^* \in \partial_C f(x)$. Да забележим, че в $\partial_C f(x)$ има поне един вектор, противопосочен на v (например x^*). Тогава, понеже $\partial_C f(x)$ е изпъкнало множество, което не съдържа 0, нито един вектор от $\partial_C f(x)$ не е еднопосочен с v.

Следователно максимум в 1 се достига от някой от векторите в $\partial_C f(x)$, противопосочни на v (т.е. еднопосочни с x^*). Нека този максимум се достига за $v^* \in \partial_C f(x)$.

Тогава

$$f^\circ(x)(v) = \langle v^*, v\rangle = \frac{\|v^*\|}{\|x^*\|}\langle x^*, v\rangle = \frac{\|v^*\|}{\|x^*\|}\left\langle x^*, -\frac{x^*}{\|x^*\|}\right\rangle = \\ = -\frac{\|v^*\|}{\|x^*\|}\|x^*\| = -\|v^*\| \le -\|x^*\|.$$

Освен това

$$f^\circ(x)(v) \ge \langle x^*, v\rangle = -\|x^*\|,$$

следователно $v^* = x^*$ и $f^\circ(x)(v) = \langle x^*, v\rangle = -\|x^*\|$.

Тогава

$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} \le f^\circ(x)(v) = -\|x^*\| = -d(0, \partial_C f(x)) < 0.$$

□

Упражнение 2 (10.9)**.** Да се докаже, че ако $\partial_C f(x)$ е едноелементно множество с елемент x^*, то f е диференцируема по Гато в x и $f'_G(x) = x^*$.

Доказателство. Нека $h \in X$ е произволна посока. От [Cla13, определение 10.3] следва, че

$$f^\circ(x)(h) = \max\{\langle y^*, h\rangle \mid y^* \in \partial_C f(x)\} = \langle x^*, h\rangle.$$

Освен това, понеже имаме само един функционал в $\partial_C f(x)$,

$$\langle x^*, h\rangle = -\langle x^*, -h\rangle = -\max\{\langle y^*, -h\rangle \mid y^* \in \partial_C f(x)\} = -f^\circ(x)(-h) = \\ = -\limsup_{\substack{z\to x\\ t\downarrow 0}}\frac{f(z-th)-f(z)}{t} = \liminf_{\substack{z\to x\\ t\downarrow 0}}\frac{f(z)-f(z-th)}{t} \overset{y=z-th}{=} \\ = \liminf_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\frac{f(y+th)-f(y)}{t}.$$

Получаваме равенство за lim inf и lim sup, следователно съществува общата граница

$$\langle x^*, h\rangle = \lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+th)-f(y)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Едностранната производна в x по посока h съвпада с непрекъснатия линеен функционал x^* за всяко $h \in X$, следователно f е диференцируема по Гато в x и $f'_G(x) = x^*$. □

Упражнение 3 (10.16)**.** Нека f е Липшицова около x и нека g е непрекъснато диференцируема около x. Да се докаже, че

$$\partial_C(f+g)(x) = \partial_C f(x) + \{g'(x)\}.$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че $[f+h]^\circ(x)(h) = f^\circ(x)(h) + g^\circ(x)(h)$. От [Cla13, теорема 10.13] следва неравенството

$$[f+h]^\circ(x)(h) \le f^\circ(x)(h) + g^\circ(x)(h).$$

Нека сега $\{y_k\} \to x$ и $\{t_k\} \downarrow 0$ са редици, за които

$$f^\circ(x)(h) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k+t_kh)-f(y_k)}{t_k}.$$

По теоремата за средните стойности стойности за всяко $k = 1, 2, \ldots$ съществува $z_k \in [y_k, y_k + t_kh]$, така че

$$\frac{g(y_k+t_kh)-g(y_k)}{t_k} = \left\langle g'(z_k), h\right\rangle.$$

От регулярността на g в x и непрекъснатостта на g' около x следва, че

$$g^\circ(x)(h) = \left\langle g'(x), h\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle g'(z_k), h\right\rangle.$$

Получаваме

$$\begin{aligned}
f^\circ(x)(h) + g^\circ(x)(h) &= f^\circ(x)(h) + \left\langle g'(x), h\right\rangle = \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{f(y_k+t_kh)-f(y_k)}{t_k} + \left\langle g'(z_k), h\right\rangle\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{[f+g](y_k+t_kh)-[f+g](y_k)}{t_k}\right) \le \\
&\le \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{[f+g](y+th)-[f+g](y)}{t} = [f+g]^\circ(x)(h),
\end{aligned}$$

което и трябваше да се докаже. □

Упражнение 4 (11.9)**.** Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема функция и съществува $\delta > 0$, такова че за всяко $x \in B(0,1)$ е изпълнено

$$\left\| f'(x) \right\| \geq \delta.$$

Да се докаже, че

$$\min_{B(0,1)} f \leq f(0) - \delta.$$

Доказателство. От [Cla13, следствие 11.8] с $Y = B(0,1)$ и $x = 0$ имаме

$$\min_{y \in B(0,1)} (f(y) - f(0)) \leq \min_{y \in B(0,1)} \left\langle f'(z), y \right\rangle .$$

Тогава

$$\begin{aligned} \min_{y \in B(0,1)} f(y) \leq f(0) + \min_{y \in B(0,1)} \left\langle f'(z), y \right\rangle = f(0) - \max_{y \in B(0,1)} \left\langle f'(z), y \right\rangle = \\ = f(0) - \left\| f'(z) \right\| \leq f(0) - \delta. \end{aligned}$$

□

Литература

[Cla13] Francis Clarke. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer London, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4471-4820-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3.